

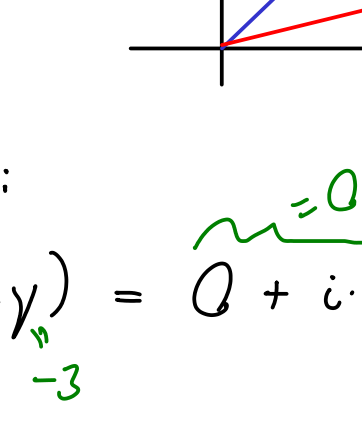
Start um 17:03

- Themenwünsche:
- Komplexe Zahlen
 - Potenzen von komplexen Zahlen
 - LGS mit komplexen Zahlen
 - Eigenwerte / Eigenvektoren

Komplexe Zahlen: $\mathbb{C}$ ist irgendwie $\mathbb{R}^2$

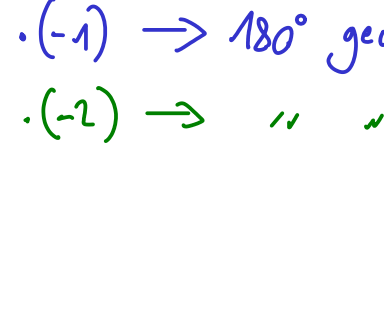
aber mit Multiplikation

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ schreiben wir $x+iy$
 $(i \text{ entspricht } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$



Addition + $\leadsto$ Vektoraddition (komponentenweise!)

Bsp: $(3+i1) + (4+i2) = 7+i3$



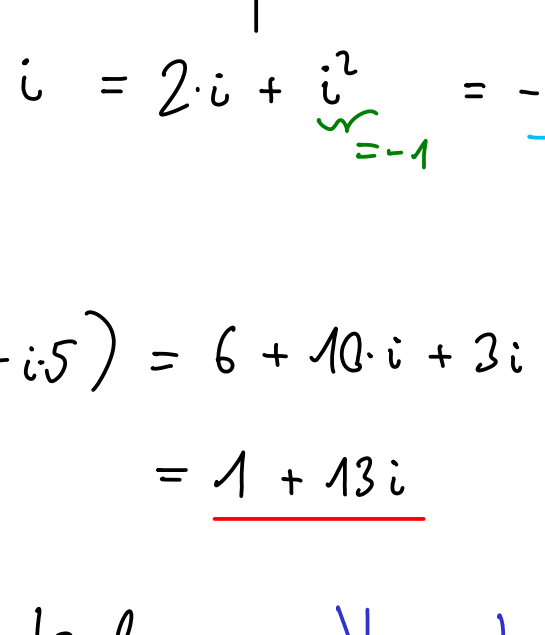
Inverses Element bzgl. + :

$7+i3 + (x+iy) = 0+i0$
 $-7 \quad -3$

Also muss $i^2 = -1$ erfüllt sein.

Merkregel: Rechne wie immer (wie in den reellen Zahlen) und mit i als Variable, aber ersetze i^2 immer mit (-1) .

Bsp: (a) $(2+i) \cdot i = 2i + i^2 = 2i - 1 = -1 + 2i$



Inverses Element bzgl. -: Was ist $\frac{1}{5+3i}$?

$(5+3i) \cdot (x+iy) = 1+i0$

Beide Seiten mal $(5-3i)$:

$\Leftrightarrow (5-3i)(5+3i)(x+iy) = 5-3i$

$25+15i-15i-9i^2 = 0$

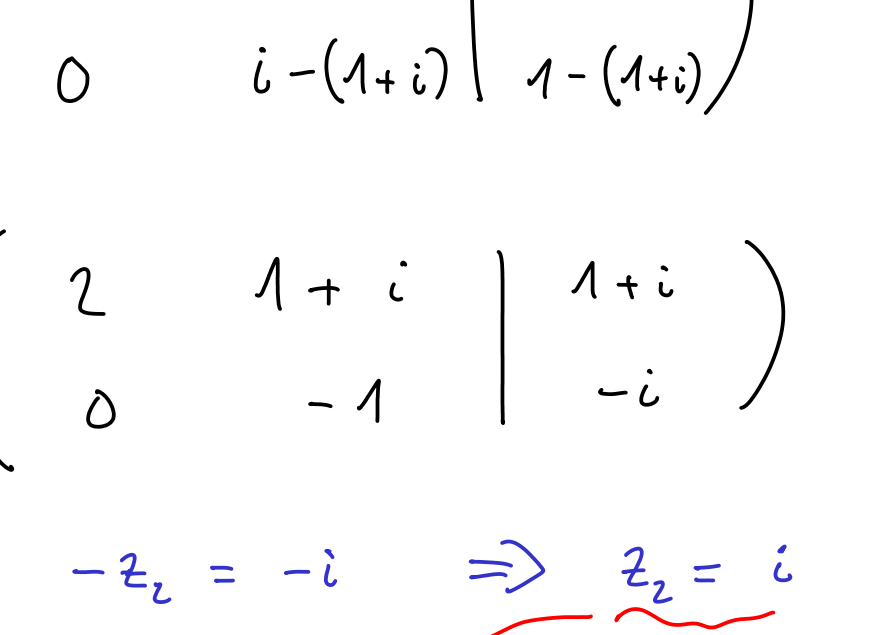
$\Leftrightarrow 34 \cdot (x+iy) = 5-3i$

$\Leftrightarrow x+iy = \left(\frac{5}{34} - \frac{3}{34}i\right)$

Merke: Für $\frac{1}{5+3i}$ erweitere mit $5-3i$ (Dann wird Nenner reell!)

Bsp: $\frac{1}{7+6i} = \frac{7-6i}{(7+6i)(7-6i)} = \frac{7-6i}{49+36} = \frac{7}{85} - \frac{6}{85}i$

Def: Für $z \in \mathbb{C}$ ($z=x+iy$) heißt $\bar{z} = x-iy \in \mathbb{C}$ die komplex konjugierte Zahl zu z .



Gauß-Algorithmus mit komplexen Zahlen

$A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ I. $\cdot \frac{2}{1+i}$

NR: $i \cdot \frac{2}{1+i} = 2i \cdot \frac{(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 2i \cdot \frac{1-i}{1+1} = i - i^2 = 1+i$

II-I $\leadsto \begin{pmatrix} 2 & 1+i & | & 1+i \\ 0 & i-(1+i) & | & 1-(1+i) \end{pmatrix}$

$\leadsto \begin{pmatrix} 2 & 1+i & | & 1+i \\ 0 & -1 & | & -i \end{pmatrix}$

II: $-z_2 = -i \Rightarrow z_2 = i$

I: $2z_1 + (1+i)z_2 = 1+i$ NR: $(1+i) \cdot i = i + i^2 = i - 1 = -1 + i$

$\Leftrightarrow 2z_1 + (i-1) = 1+i$

$\Leftrightarrow 2z_1 = 2 \Leftrightarrow z_1 = 1$

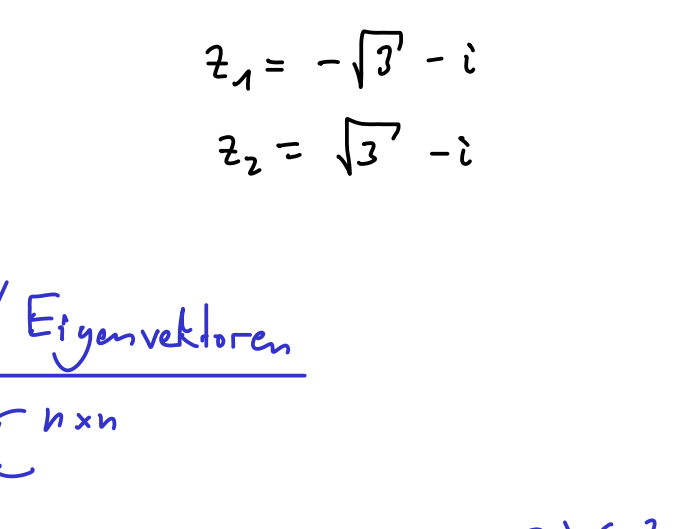
Lösung: $z = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

Nebenrechnung hinschreiben!

Alternative Darstellungen:

$\hookrightarrow$ Erinnerung 1. Übungsblatt $\leadsto$ Polarkoordinaten

Merke: $r^2 = x^2 + y^2$
 $\tan \varphi = \frac{y}{x}$
 $\hookrightarrow$ Quadranten betrachten $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$



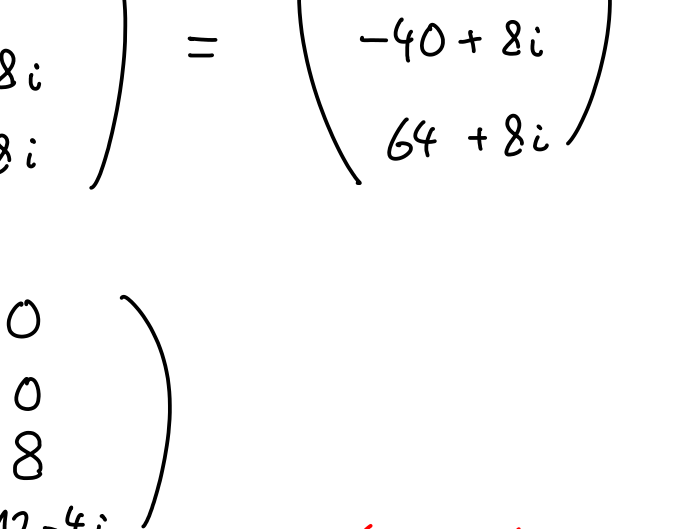
Exponentialdarstellung dank Formel:

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$z = r e^{i\varphi}$

Hilfreich bei Multiplikation und Potenzieren.

Bsp: (a) $z = 2+2i$
 $z = \sqrt{8} e^{i\frac{\pi}{4}}$



(b) $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

Multiplikation: $z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Potenzen: $(2+2i)^{20} = (\sqrt{8} e^{i\frac{\pi}{4}})^{20} = 8^{10} e^{i5\pi} = 8^{10} (-1) = -2^{30}$



Wurzeln: Löse $z^n = w$ für geg. w, n .

Bsp- Rechnung: $z^3 = -8i$

$z^3 = 8 e^{i(\frac{3}{2}\pi + k2\pi)}$ für $k=0,1,2, \dots$

Formal: Auf beiden Seiten $(\)^{\frac{1}{3}}$

Also Lösungen abhängig von k :

$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot e^{\frac{1}{3}i(\frac{3}{2}\pi + k2\pi)} = 2 \cdot e^{i(\frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi k)}$



3 Lösungen: $z_0 = 2i$
 $z_1 = -\sqrt{3} - i$
 $z_2 = \sqrt{3} - i$

Eigenwerte / Eigenvektoren

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Gesucht: $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$Ax = \lambda x$ $\leftarrow$ Eigenvektor

λ $\leftarrow$ Eigenwert

$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ -12-4i \end{pmatrix}$

X_1 EV zu A^2

$A X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -64+24+8i \\ 40+24+8i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -40+8i \\ 64+8i \end{pmatrix}$

$= (-5+i) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ -12-4i \end{pmatrix}$

NR: $(-5+i)(-12-4i) = \dots = 64+8i$

$\Rightarrow X_1$ ist EV von A !